

Πρόταση

Έστω (f_n) μια ακολουθία ολοκληρώσιμων κατά Riemann συναρτήσεων ω $B(A, \mathbb{R})$ όπου $A = [a, b]$ και $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα. Τότε η f είναι επίσης ολοκληρώσιμη κατά Riemann και ισχύει: $F_n \rightarrow F$ όπου $F_n(x) = \int_a^x f_n(u) du$ και $F(x) = \int_a^x f(u) du$

Απόδειξη

Εφόσον $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα και $(f_n) \subseteq B(A, \mathbb{R})$ έπεται ότι και η f είναι γραμμένη συνάρτηση. Επιπλέον, εφόσον (f_n) ακολουθία ολοκληρώσιμων συναρτήσεων και $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα ότι και η f είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann. Εφόσον $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \nu_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq \nu_0) : |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a} \quad \forall x \in A$ οότε

$$\sup_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{b-a} \quad \text{Άρα, } \left| \int_a^x f_n(u) du - \int_a^x f(u) du \right| = \left| \int_a^x (f_n(u) - f(u)) du \right|$$
$$\leq \int_a^x |f_n(u) - f(u)| du \leq \sup_{x \in [a, b]} |f_n(u) - f(u)| (x-a) \leq \frac{\varepsilon}{b-a} (b-a) = \varepsilon$$

Δι' αυτό, $F_n \rightarrow F$ ομοιόμορφα στο $[a, b]$

Πρόταση

Έστω (f_n) ακολουθία παραγωγισίμων συναρτήσεων του $([a, b], \mathbb{R})$ ζ.ω.: $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(a) = \xi \in \mathbb{R}$. Εάν $\forall n \in \mathbb{N}$ η f_n' είναι συνεχής και η (f_n') συγκλίνει ομοιόμορφα προς μια συνάρτηση g , τότε υπάρχει f συνάρτηση παραγωγισίμη ζ.ω.: $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα και $f'(x) = g(x)$

Απόδειξη

Εφόσον (f_n') ακολουθία συνεχών συναρτήσεων στο $[a, b]$ και $f_n' \rightarrow g$ ομοιόμορφα, έπεται ότι g είναι συνεχής άρα $\{g, f_n' : n \in \mathbb{N}\}$ είναι συνεχείς στο $[a, b]$ και γραμμένες άρα είναι ολοκληρώσιμες. Εφόσον, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(a) = \xi$ από την προηγ. πρόταση έχουμε ότι: $f_n(a) + \int_a^x f_n'(u) du \rightarrow \xi + \int_a^x g(u) du$ (*) ομοιόμορφα για $x \in [a, b]$

Επιπλέον, εφόσον f_n' συνεχής στο $[a, b] \quad \forall n$, έπεται ότι είναι ολοκληρώσιμη και για αρχική αυτής είναι η f_n οότε: $\int_a^x f_n'(u) du = f_n(x) - f_n(a)$ συνεπώς από την (*) έχουμε ότι $f_n \xrightarrow{\text{ομοιόμορφα}} f$ όπου $f(x) = \xi + \int_a^x g(u) du$ (***)

Επιπλέον εφόσον g : συνεχής $\Rightarrow G(x) = \int_a^x g(u) du$: παραγωγισίμη και $G'(x) = g(x)$ άρα από την (***) και η f είναι παραγωγισίμη και $f'(x) = g(x)$

Άσκηση

Να δείχθει ότι ένα συναρτησοειδές $T: B(A, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής συνάρτηση αν - ν $(\exists \delta > 0) : (\forall f \in B(A, \mathbb{R})) \mid \mid f \mid \mid \leq \delta \Rightarrow \mid T f \mid \leq 1$

Δίω

$(\Rightarrow)$ Έστω ότι $T: B(A, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής τότε

$$(\exists M > 0) : (\forall f \in B(A, \mathbb{R})) \mid \mid f \mid \mid \leq 1 \Rightarrow \mid T f \mid \leq M$$

$$\text{Έστω λοιπόν } f \in B(A, \mathbb{R}) \mid \mid f \mid \mid \leq 1 \text{ τότε } \mid T(\frac{1}{M} f) \mid \leq 1$$

$$\text{Έστω } g = \frac{1}{M} f \text{ τότε } (\exists \delta = \frac{1}{M}) : (\forall g \in B(A, \mathbb{R})) \mid \mid g \mid \mid = \frac{1}{M} \mid \mid f \mid \mid \leq \frac{1}{M} = \delta \Rightarrow$$

$$(\Leftarrow) \text{ Έστω ότι } \Rightarrow \mid T g \mid \leq 1$$

$$(\exists \delta > 0) (\forall f \in B(A, \mathbb{R})) : \mid \mid f \mid \mid \leq \delta \Rightarrow \mid T(f) \mid \leq 1. \text{ Ο.δ.ο. } T: \text{συνεχής}$$

$$\delta \lambda. (\exists M > 0) (\forall f \in B(A, \mathbb{R})) : \mid \mid f \mid \mid \leq 1 \Rightarrow \mid T f \mid \leq M. \text{ Έστω ότι αυτό δεν}$$

$$\text{ισχύει τότε } (\forall M > 0) (\exists f \in B(A, \mathbb{R})) : \mid \mid f \mid \mid \leq 1 \Rightarrow \mid T f \mid > M$$

$$\text{Έστω } M = \frac{1}{\delta} \text{ τότε θα υπάρχει } f \in B(A, \mathbb{R}) \mid \mid f \mid \mid \leq 1 \text{ και } \mid T f \mid > \frac{1}{\delta}$$

$$\text{ελλά τότε } \delta f \in B(A, \mathbb{R}) \text{ και } \mid \mid \delta f \mid \mid = \delta \text{ συνεπώς } \mid T(\delta f) \mid \leq 1 \Rightarrow$$

$$\mid \delta(T f) \mid \leq 1 \Rightarrow \mid T f \mid \leq \frac{1}{\delta} \text{ ΑΤΟΠΟ, άρα } T \text{ είναι συνεχής}$$

Άσκηση

$$\text{Έστω } f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}, 0 < x < 1, n \in \mathbb{N}$$

i) Ν.δ.ο. η (f_n) είναι φθίνουσα ακολουθία

ii) Δείξτε ότι (f_n) συγκλίνει κατά σημείο σε $(0, 1)$ ελλά όχι
 ομοιόμορφα

Δίω

i) φανερά ισχύει $f_{n+1}(x) \leq f_n(x) \forall x \in (0, 1)$ άρα (f_n) φθίνουσα

ii) $\forall x \in (0, 1)$ έχουμε $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}} = 0$ Άρα $f_n \xrightarrow{κ.σ.} f$
 όπου $f(x) = 0, x \in (0, 1)$. Αλλά εφόσον $P_n(f_n, f) = \min\{1, \sup_{x \in (0, 1)} \mid f_n(x) - f(x) \mid\}$

$$\text{και } \sup_{x \in (0, 1)} \mid f_n(x) - f(x) \mid = \sup_{x \in (0, 1)} \frac{1}{\sqrt{x+1}} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{\sqrt{x+1}} = 1$$

$$P_n(f_n, f) = 1 \neq 0. \text{ Άρα η σύγκλιση ΔΕΝ είναι ομοιόμορφη}$$

Παρατήρηση

Στην προηγ. άσκηση (f_n) : φθίνουσα ακολουθία συνεχών
συναρτήσεων η οποία συγκλίνει κατά σημείο σε μία
συνεχή συνάρτηση. Όμως το $A = (0, 1)$ δεν είναι
σφραγές υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Άρα στην πρόταση
η συνθήκη της σφραγιστότητας είναι
ουσιώδης.

Άσκηση

Ν.δ.ο. η $f_v(x) = (1 + \frac{x}{v})^v$ συγκλίνει οπ/φρα στο $[0, 2]$.

Λύση

Το $A = [0, 2]$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Επιδέον,

$\forall v \in \mathbb{N}$: f_v είναι συνεχής στο $[0, 2]$. Επίσης, για $v > 1$

$$\frac{f_v(x)}{f_{v-1}(x)} = \frac{(1 + \frac{x}{v})^v}{(1 + \frac{x}{v-1})^{v-1}} = \frac{(1 + \frac{x}{v})^v}{(1 + \frac{x}{v-1})^v} \cdot (1 + \frac{x}{v-1}) = \left(\frac{1 + \frac{x}{v}}{1 + \frac{x}{v-1}} \right)^v \left(1 + \frac{x}{v-1} \right)$$

$$= \left(1 - \frac{x}{v^2 - v + xv} \right)^v \left(1 + \frac{x}{v-1} \right) \text{ αλλά } \forall v < 1 : \frac{x}{v^2 - v + xv} < 1$$

διότι $x < xv \leq xv + v^2 - v$ οπότε

[εφόσον από την ανισότητα Bernoulli γνωρίζουμε ότι $(1 + \alpha)^v \geq 1 + v\alpha$, $\alpha > -1$, $v \in \mathbb{N}$] έχουμε ότι :

$$\frac{f_v(x)}{f_{v-1}(x)} \geq \left(1 - v \cdot \frac{x}{v(v-1+x)} \right) \left(1 + \frac{x}{v-1} \right) = \frac{v-1+x-x}{v-1+x} \cdot \frac{v-1+x}{v-1} = 1$$

Δηλ., $f_v \geq f_{v-1}$ $\forall v > 1$ έρα (f_v) : αυτ. ακολουθία

Επίσης $f_v \xrightarrow{κ.σ.} f$ στο $[0, 2]$ με $f(x) = e^x$ συνεχής στο $[0, 2]$

Άρα (από την πρόταση Dini) έχουμε ότι $f_v \rightarrow f$ οπ/φρα στο $[0, 2]$

Άσκηση

Ν.δ.ο. $\int_0^x (1 + \frac{u}{v})^v du \rightarrow e^x - 1$ οπ/φρα στο $[0, 2]$

Λύση

Έστω $f_v(x) = (1 + \frac{x}{v})^v$ για ακολουθία συνεχ. συναρτ. στο $[0, 2]$ (και $[0, 2]$ κλειστό και φραγτ. διέσχυτε ως $\mathbb{R}$). Επίσης,

κάθε f_v είναι φραγμένη στο $[0, 2]$ έρα είναι κατ' Riemann ολοκληρώσιμη. Επιδέον, από την προηγ. άσκηση είδαμε ότι $f_v \rightarrow f$ οπ/φρα στο $[0, 2]$, $f(x) = e^x$

οπότε από την πρόταση του αζοράν την οποία αφορά συγκλίση και την ολοκλήρωση έχουμε ότι

$$\int_0^x (1 + \frac{u}{v})^v du \rightarrow \int_0^x e^u du = e^x - e^0 = e^x - 1 \text{ οπ/φρα στο } [0, 2]$$

- Έχουμε τον τ.χ. $(F(A, \mathbb{R}), p_\infty)$ όπου $p_\infty(f, g) = \min\{1, \sup_{x \in A} |f(x) - g(x)|\}$ και θεωρούμε το $C(A, \mathbb{R}) \subseteq F(A, \mathbb{R})$.
- Εξετάζουμε τότε ένα σύνολο συνεχών συναρτήσεων είναι συμπαγές
- Είναι γνωστό ότι σε έναν τ.χ. (E, ρ) η έννοια της συμπαγότητας ταυτίζεται με την έννοια της ακολουδιακής συμπαγότητας. [Ένα σύνολο $A \subseteq (E, \rho)$ είναι ακολουδιακά συμπαγές αν κάθε ακολουθία στοιχείων του A έχει μια συγκλίνουσα υποακολουθία στο A]
- Θεωρούμε ένα σύνολο H συνεχών συναρτήσεων το $F(A, \mathbb{R})$. Έστω $x_0 \in A$. Τότε κάθε f είναι συνεχής στο x_0 , συνεπώς $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall y \in A): |x_0 - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Εάν υπάρχει δ τ.μ. το παραπάνω να ισχύουν $\forall f \in H$ τότε λέμε ότι H είναι ισοσυνεχές στο x_0 δηλ. εάν ισχύει ότι: $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall y \in A): |x_0 - y| < \delta \Rightarrow |f(x_0) - f(y)| < \varepsilon \quad \forall f \in H$ λέμε ότι H ισοσυνεχές στο $x_0 \in A$.
- Θα λέμε ότι H είναι ισοσυνεχές στο A . Εάν είναι ισοσυνεχές σε κάθε $x_0 \in A$

Σημείωση 1

Εάν $\mathcal{H}$ είναι πεπερασμένο υποσύνολο του $C(A, \mathbb{R})$ τότε H είναι ισοσυνεχές, διότι $\mathcal{H} = \{f_1, \dots, f_k\}$ και κάθε $f_i \in C(A, \mathbb{R})$ οπότε $(\forall x \in A)(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta_i > 0)(\forall y \in A): |x - y| < \delta_i \Rightarrow |f_i(x) - f_i(y)| < \varepsilon$ $i=1, \dots, k$
 οπότε αν $\delta = \min\{\delta_1, \dots, \delta_k\}$ θα ισχύει ότι
 $(\forall x \in A)(\forall \varepsilon > 0)(\forall y \in A): |x - y| < \delta \Rightarrow |f_i(x) - f_i(y)| < \varepsilon, \quad \forall f_i \in \mathcal{H}$
 Δηλ H ισοσυνεχές.

Σημείωση 2

Εάν $H_1, \dots, H_k$ είναι ισοσυνεχή υποσύνολα του $C(A, \mathbb{R})$ τότε $H = \bigcup_{i=1}^k H_i$ είναι ισοσυνεχές υποσύνολο του $C(A, \mathbb{R})$ διότι εφόσον H_i ισοσυνεχές έπεται ότι για $x \in A$:
 $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta_i > 0)(\forall y \in A): |x - y| < \delta_i \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad \forall f \in H_i$
 Έστω $\delta = \min\{\delta_1, \dots, \delta_k\}$ έχουμε:
 $(\forall \varepsilon > 0)(\forall y \in A): |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad \forall f \in H$

Πρόταση

Έστω $(f_n) \subseteq C(A, \mathbb{R})$ και $f_n \xrightarrow{\text{κ.σ.}} f$, $f \in F(A, \mathbb{R})$

Αν $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι ισοσυνεχές τότε $f \in C(A, \mathbb{R})$ και $\{f, f_n : n \in \mathbb{N}\}$ ισοσυνεχές.

Απόδειξη

Έστω $x \in A$ και $\varepsilon > 0$. Τότε εφόσον $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι ισοσυνεχές έπεται ότι $(\exists \delta > 0)(\forall y \in A) : |x - y| < \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Εφόσον $f_n \xrightarrow{\text{κ.σ.}} f$ έχουμε

$$|f(x) - f(y)| = |\lim f_n(x) - \lim f_n(y)| = \lim |f_n(x) - f_n(y)| \quad \text{Άρα}$$

$(\forall y \in A) : |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Άρα f συνεχής και επιπλέον

$\{f, f_n : n \in \mathbb{N}\}$ ισοσυνεχές σύνολο (ως ένωση 2 ισοσυνεχών συνόλων)

[Σημείωση: Το δ που αφορά την συνέχεια της f στο x είναι το ίδιο που αφορά την ισοσυνέχεια της οικογένειας $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$]

Πρόταση

Έστω A συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ ισοσυνεχής ακολουθία του $C(A, \mathbb{R})$. Αν $f_n \xrightarrow{\text{κ.σ.}} f$ όπου $f \in F(A, \mathbb{R})$ τότε $f_n \rightarrow f$ ομ./φρ

Απόδειξη

Έστω $\varepsilon > 0$. Λόγω του ότι $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι ισοσυνεχές στο $x \in A$ $(\exists \delta_x > 0) : (\forall y \in A) : |x - y| < \delta_x \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Θέτουμε $V(x) = B(x, \delta_x)$ τότε η συλλογή $\{V(x) : x \in A\}$

είναι μια ανοικτή κάλυψη του συμπαγούς A . Συνεπώς,

$(\exists x_1, \dots, x_k \in A) : A \subseteq V(x_1) \cup \dots \cup V(x_k)$, επιλέξον εφόσον

$f_n \xrightarrow{\text{κ.σ.}} f$ έπεται ότι $f_n(x_i) \rightarrow f(x_i) \quad \forall i \in \{1, \dots, k\}$.

Άρα $(\exists n_i \in \mathbb{N}) : |f_{n_i}(x_i) - f(x_i)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall i \geq n_i$

Έστω $n_0 = \max\{n_1, \dots, n_k\}$ τότε $|f_n(x_i) - f(x_i)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall n \geq n_0$
 $\forall i \in \{1, \dots, k\}$

Έστω $y \in A \Rightarrow (\exists x_i) : y \in V(x_i) = B(x_i, \delta_{x_i}) \Rightarrow$

$|y - x_i| < \delta_{x_i} \Rightarrow |f_n(x_i) - f_n(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$ [Λόγω ισοσυνεχίας του $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$]

Επιπλέον, εφόσον $f_n \xrightarrow{\text{κ.σ.}} f$ και $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ ομ. προσ. ποσών f : συνεχής, συνεπώς

$$\begin{aligned}
 |f_v(y) - f(y)| &= |f_v(y) - f_v(x_i) + f_v(x_i) - f(x_i) + f(x_i) - f(y)| \leq \\
 &\leq |f_v(y) - f_v(x_i)| + |f_v(x_i) - f(x_i)| + |f(x_i) - f(y)| \\
 &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \quad \forall v \geq v_0 \quad \text{dpe } f_v \rightarrow f \text{ at } y
 \end{aligned}$$